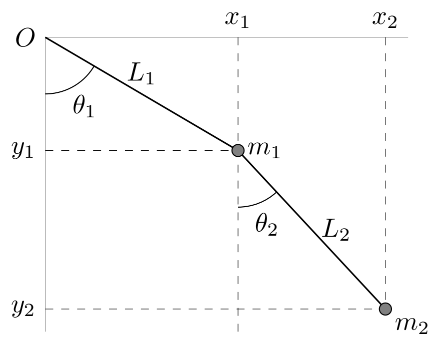
Modelització del pèndol doble

Claudi Lleyda Moltó

Volem estudiar el comportament d'un pèndol doble, calculant la trajectòria que segueixen les dues masses al llarg del temps. Plantegem el sistema segons el diagrama següent:



Les equacions de la posició de la primera massa són

$$\begin{cases} x_1 = L_1 \sin(\theta_1) \\ y_1 = -L_1 \cos(\theta_1), \end{cases}$$

i les de la segona massa ens queden

$$\begin{cases} x_2 = x_1 + L_2 \sin(\theta_2) \\ y_2 = y_1 - L_2 \cos(\theta_2), \end{cases}$$

i per tant

$$\begin{cases} x_2 = L_1 \sin(\theta_1) + L_2 \sin(\theta_2) \\ y_2 = -L_1 \cos(\theta_1) - L_2 \cos(\theta_2). \end{cases}$$

Per tant podem reduir el problema a determinar els valors de θ_1 i θ_2 en funció del temps.

L'energia potencial del sistema ve donada per

$$P = m_1 g y_1 = -m_1 g L_1 \cos(\theta_1) - m_2 g\big(L_1 \cos(\theta_1) + L_2 \cos(\theta_2)\big)$$

i l'energia cinètica del sistema és

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2}m_1\big(\dot{x}_1^2+\dot{y}_1^2\big)+\frac{1}{2}m_2\big(\dot{x}_2^2+\dot{y}_2^2\big)\\ &= \frac{1}{2}m_1L_1^2\dot{\theta}_1^2+\frac{1}{2}m_2\big(L_1^2\dot{\theta}_1^2+L_2^2\dot{\theta}_2^2+2L_1L_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_1-\theta_2)\big). \end{aligned}$$

Podem trobar el Lagrangià del sistema fent

$$\begin{aligned} L = K-P = {} & \frac{1}{2}(m_1+m_2)L_1^2\dot{\theta}_1^2+\frac{1}{2}m_2L_2^2\dot{\theta}_2^2+\\ & + m_2L_1L_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_1-\theta_2)+(m_1+m_2)gL_1\cos(\theta_1)+m_2L_2g\cos(\theta_2). \end{aligned}$$

Tenim que el Lagrangià del sistema satisfà les equacions de Lagrange

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial\theta_i}=0. \tag{1}$$

Calculem

$$\frac{\partial L}{\partial\theta_1}=-L_1g(m_1+m_2)\sin(\theta_1)-m_2L_1L_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\sin(\theta_1-\theta_2)$$

i

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}_1}\right) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big((m_1+m_2)L_1^2\dot{\theta}_1+m_2L_1L_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\sin(\theta_1-\theta_2)\big) = \\ &= (m_1+m_2)L_1^2\ddot{\theta}_1+m_2L_1L_2\big(\ddot{\theta}_2\cos(\theta_1-\theta_2)-\dot{\theta}_2\sin(\theta_1-\theta_2)(\dot{\theta}_1-\dot{\theta}_2)\big). \end{aligned}$$

També calculem

$$\frac{\partial L}{\partial\theta_2}=m_2L_1L_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\sin(\theta_1-\theta_2)-L_2m_2g\sin(\theta_2),$$

i

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}_2}\right) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(m_2L_2^2\dot{\theta}_2+m_2L_1L_2\dot{\theta}_1\cos(\theta_1-\theta_2)\big) = \\ &= m_2L_2^2\ddot{\theta}_2+m_2L_1L_2\ddot{\theta}_1\cos(\theta_1-\theta_2)-m_2L_1L_2\dot{\theta}_1\sin(\theta_1-\theta_2)(\dot{\theta}_1-\dot{\theta}_2). \end{aligned}$$

Imposem les equacions de Lagrange (1) i trobem que

$$(m_1+m_2)\big(L_1^2\ddot{\theta}_1+gL_1\sin(\theta_1)\big)+m_2L_1L_2\big(\ddot{\theta}_2\cos(\theta_1-\theta_2)+\dot{\theta}_2^2\sin(\theta_1-\theta_2)\big)=0$$

i

$$L_2\ddot{\theta}_2+L_1\ddot{\theta}_1\cos(\theta_1-\theta_2)-L_1\dot{\theta}_1^2\sin(\theta_1-\theta_2)+g\sin(\theta_2)=0.$$

D'aquestes dues equacions podem aïllar $\ddot{\theta}_1$ i $\ddot{\theta}_2$, respectivament, per trobar

$$\ddot{\theta}_1=\frac{-m_2L_2\ddot{\theta}_2\cos(\theta_1-\theta_2)-m_2L_2\dot{\theta}_2^2\sin(\theta_1-\theta_2)-(m_1+m_2)g\sin(\theta_1-\theta_2)}{(m_1+m_2)L_1}$$

i

$$\ddot{\theta}_2 = \frac{-L_1\ddot{\theta}_1\cos(\theta_1-\theta_2) + L_1\dot{\theta}_1^2\sin(\theta_1-\theta_2) - g\sin(\theta_2)}{L_2}.$$

Amb això, substituint una equació en l'altre obtenim, denotant $m = m_1 + m_2$ i $\theta = \theta_1 - \theta_2$,

$$\ddot{\theta}_1 = \frac{gm_2\sin(\theta_2)\cos(\theta) - gm\sin(\theta_1) - m_2L_1\dot{\theta}_1^2\sin(\theta)\cos(\theta) + m_2L_2\dot{\theta}_2^2\sin(\theta)}{mL_1 - m_2L_1\cos^2(\theta)}$$

i

$$\ddot{\theta}_2 = \frac{gm\sin(\theta_1)\cos(\theta) - gm\sin(\theta_2) + m_2L_2\dot{\theta}_2^2\sin(\theta)\cos(\theta) + mL_1\dot{\theta}_1^2\sin(\theta)}{mL_2 - m_2L_2\cos^2(\theta)}.$$

Aquest és un sistema d'equacions diferencials de segon ordre, i fent el canvi de variable

$$y_1 = \theta_1, \quad y_2 = \theta_2, \quad y_3 = \dot{\theta}_1, \quad \text{i} \quad y_4 = \dot{\theta}_2$$

obtenim

$$\dot{y}_1 = y_3 \quad \text{i} \quad \dot{y}_2 = y_4,$$

i denotant $y = \theta_1 - \theta_2$

$$\dot{y}_3 = \frac{gm_2\sin(y_2)\cos(y) - gm\sin(y_1) - m_2L_1y_3^2\sin(y)\cos(y) + m_2L_2y_4^2\sin(y)}{mL_1 - m_2L_1\cos^2(y)}$$

i

$$\dot{y}_4 = \frac{gm\sin(y_1)\cos(y) - gm\sin(y_2) + m_2L_2y_4^2\sin(y)\cos(y) + mL_1y_3^2\sin(y)}{mL_2 - m_2L_2\cos^2(y)}.$$

Això ens defineix un sistema d'equacions diferencials de primer ordre, però no en coneixem cap solució analítica.

Podem aproximar les seves solucions amb el mètode de Runge-Kutta d'ordre quatre, que ens diu que donat un sistema d'equacions diferencials amb condicions inicials de la forma

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = f_1(y_1, y_2, y_3, y_4, t), & y_1(0) = y_{1,0} \\ \dot{y}_2 = f_2(y_1, y_2, y_3, y_4, t), & y_2(0) = y_{2,0} \\ \dot{y}_3 = f_3(y_1, y_2, y_3, y_4, t), & y_3(0) = y_{3,0} \\ \dot{y}_4 = f_4(y_1, y_2, y_3, y_4, t), & y_4(0) = y_{4,0} \end{cases}$$

podem aproximar la seva solució de manera numèrica amb $N+1$ punts $\{y_{i,k}\}_{k=0}^N$, donats per l'expressió

$$y_{i,k} = y_{i,k-1} + \frac{1}{3}(A_{i,k} + 2B_{i,k} + 2C_{i,k} + D_{i,k}),$$

per a tot $i \in \{1,2,3,4\}$ i $k \in \{1,\dots,N\}$, on

$$A_{i,k} = \frac{h}{2} f_i(y_{1,k-1}, y_{2,k-1}, y_{3,k-1}, y_{4,k-1}, h(k-1)),$$

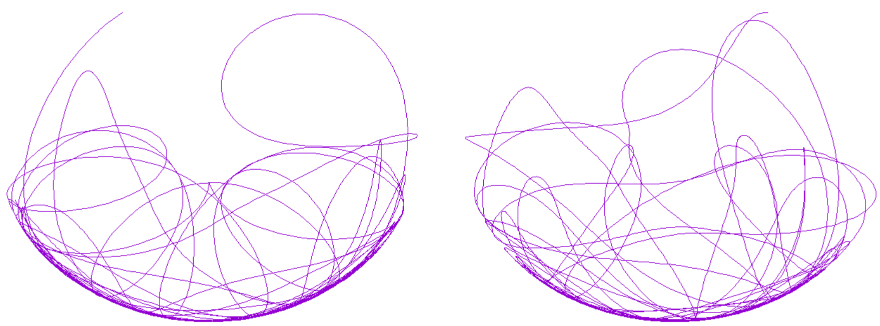
$$B_{i,k} = \frac{h}{2} f_i\left(y_{1,k-1}+A_{1,k}, y_{2,k-1}+A_{2,k}, y_{3,k-1}+A_{3,k}, y_{4,k-1}+A_{4,k}, h(k-1)+\frac{h}{2}\right)$$

$$C_{i,k} = \frac{h}{2} f_i\left(y_{1,k-1}+B_{1,k}, y_{2,k-1}+B_{2,k}, y_{3,k-1}+B_{3,k}, y_{4,k-1}+B_{4,k}, h(k-1)+\frac{h}{2}\right)$$

$$D_{i,k} = \frac{h}{2} f_i\big(y_{1,k-1}+2C_{1,k}, y_{2,k-1}+2C_{2,k}, y_{3,k-1}+2C_{3,k}, y_{4,k-1}+2C_{4,k}, hk\big),$$

i aquesta aproximació serà amb un error global d'ordre $O(h^4)$. Per estalviar-me fer els càlculs manualment utilitzem el codi del final del document.

Amb aquest codi podem produir gràfics del moviment d'un pèndol doble donades les condicions inicials. Per exemple



Aquest ha estat part del treball de recerca de la Malena Gil. Ha estat escrit seguint aquesta presentació.

RK4.c

```
#include<stdio.h>
#include<math.h>
#include<stdlib.h>

int neqs=4;
double L1,L2,m1,m2,g;

double f(int i,double y1,double y2,double y3,double y4) {
  double resultat=4;
  switch(i) {
    case 0:
      resultat=y3;
```

```
      break;
    case 1:
      resultat=y4;
      break;
    case 2:
      resultat=(-g*sin(y1)*(m1+m2)-m2*L2*y4*y4*sin(y1-y2)-m2*cos(y1-y2)*(L1*y3*y3*sin(y1-y2)-g*sin(y2)))/(L1*(m1+m2-m2*cos(y1-y2)*cos(y1-y2)));
      break;
    case 3:
      resultat=(-cos(y1-y2)*(-g*sin(y1)*(m1+m2)-m2*L2*y4*y4*sin(y1-y2))+(m1+m2)*(L1*y3*y3*sin(y1-y2)-g*sin(y2)))/(L2*(m1+m2-m2*cos(y1-y2)*cos(y1-y2)));
      break;
  }
  return resultat;
}

int main(void) {
  int iteracions;
  printf("Nombre d'iteracions: ");
  if(scanf("%d",&iteracions));

  double y0[neqs];
  for(int i=0; i<neqs; i++) {
    double cinicial;
    printf("y%d(0)=",i+1);
    if(scanf("%lf",&cinicial));
    y0[i]=cinicial;
  }

  double h;
  printf("Step: "); if(scanf("%lf",&h));
  printf("L1: "); if(scanf("%lf",&L1));
  printf("L2: "); if(scanf("%lf",&L2));
  printf("m1: "); if(scanf("%lf",&m1));
  printf("m2: "); if(scanf("%lf",&m2));
  printf("g: "); if(scanf("%lf",&g));

  FILE *dt1; FILE *dt2;
  dt1=fopen("interior.dat","w");
  dt2=fopen("exterior.dat","w");

  fprintf(dt1,"Recorregut interior\n");
  fprintf(dt2,"Recorregut exterior\n");

```

```c
  double y[neqs],A[neqs],B[neqs],C[neqs],D[neqs];
  for(int i=0; i < neqs; i++) {
    y[i]=y0[i];
  }
  for(int i=0; i<iteracions; i++) {
    for(int j=0; j<neqs; j++) {
      A[j]=f(j,y[0],y[1],y[2],y[3]);
      B[j]=f(j,y[0]+(h/2.)*A[0],y[1]+(h/2.)*A[1],y[2]+(h/2.)*A[2],y[3]+(h/2.)*A[3]);
      C[j]=f(j,y[0]+(h/2.)*B[0],y[1]+(h/2.)*B[1],y[2]+(h/2.)*B[2],y[3]+(h/2.)*B[3]);
      D[j]=f(j,y[0]+h*C[0],y[1]+h*C[1],y[2]+h*C[2],y[3]+h*C[3]);
      y[j]=y[j]+(h/6.)*(A[j]+2*B[j]+2*C[j]+D[j]);
    }
    fprintf(dt1,"%lf\t%lf\n",L1*sin(y[0]),-L1*cos(y[0]));
    fprintf(dt2,"%lf\t%lf\n",L1*sin(y[0])+L2*sin(y[1]),-L1*cos(y[0])-L2*cos(y[1]));
  }
  fclose(dt1); fclose(dt2);
  return 0;
}
```