Geodèsiques del pla hiperbòlic

Claudi Lleyda Moltó

Denotem
$$\mathbb{H}^2 = \{(u,v) \subseteq \mathbb{R}^2 \mid v > 0\}.$$
Aleshores direm que una superfície S que admet una parametrització global
$$\begin{aligned} \varphi\colon \mathbb{H}^2 &\longrightarrow S \\ (u,v) &\longmapsto \varphi(u,v) \end{aligned}$$
tal que la seva primera forma fonamental té coeficients $E = G = 1/v^2$ i $F = 0$ s'anomena *pla hiperbòlic*. Volem trobar totes les seves geodèsiques.

Comencem calculant els seus símbols de Christoffel. Aquests són les solucions dels sistemes
$$\begin{cases} \Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{12}^2 F = \frac{1}{2} E_u \\ \Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G = F_u - \frac{1}{2} E_v \end{cases} \begin{cases} \Gamma_{12}^1 E + \Gamma_{12}^2 F = \frac{1}{2} E_v \\ \Gamma_{12}^1 F + \Gamma_{12}^2 G = \frac{1}{2} G_u \end{cases} \begin{cases} \Gamma_{22}^1 E + \Gamma_{22}^2 F = F_v - \frac{1}{2} G_u \\ \Gamma_{22}^1 F + \Gamma_{22}^2 G = \frac{1}{2} G_v \end{cases}.$$
Calculant trobem que
$$E_v = G_v = \frac{-2}{v^3}, \qquad \text{i} \qquad E_u = G_u = F_u = F_v = 0$$
i ens queden els sistemes
$$\begin{cases} \Gamma_{11}^1 \frac{1}{v^2} = 0 \\ \Gamma_{11}^2 \frac{1}{v^2} = -\frac{-1}{v^3} \end{cases} \qquad \begin{cases} \Gamma_{12}^1 \frac{1}{v^2} = \frac{-1}{v^3} \\ \Gamma_{12}^2 \frac{1}{v^2} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \Gamma_{22}^1 \frac{1}{v^2} = 0 \\ \Gamma_{22}^2 \frac{1}{v^2} = \frac{-1}{v^3} \end{cases},$$
d'on trobem que
$$\Gamma_{11}^2 = -\Gamma_{12}^1 = -\Gamma_{21}^1 = -\Gamma_{22}^2 = \frac{1}{v} \qquad \text{i} \qquad \Gamma_{11}^1 = \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \Gamma_{22}^1 = 0.$$

Sigui $\alpha(t) = \varphi(u(t), v(t))$ una corba de la superfície S. Aleshores prenem $X(t)$ tal que
$$X(t) = a(t)\varphi_u + b(t)\varphi_v = \alpha'(t) = u'(t)\varphi_u + v'(t)\varphi_v.$$
Tenim que aquesta és una geodèsica si satisfà les equacions de transport paral·lel:
$$\begin{cases} a' + \Gamma_{11}^1 au' + \Gamma_{12}^1 av' + \Gamma_{21}^1 bu' + \Gamma_{22}^1 bv' = 0 \\ b' + \Gamma_{11}^2 au' + \Gamma_{12}^2 av' + \Gamma_{21}^2 bu' + \Gamma_{22}^2 bv' = 0 \end{cases}.$$

Considerem les corbes en S de la forma $\alpha(t) = \varphi(\alpha_0, t)$. Calculant tenim que $u'(t) = 0$ i $v'(t) = 1$, i ens queda el sistema

$$\begin{cases} a' + \frac{a}{v} = a' + \frac{a}{t} = 0 \\ b' + \frac{b}{v} = b' + \frac{b}{t} = 0 \end{cases},$$

que té per solució $a(t) = K_1 t$ i $b(t) = K_2 t$. Aleshores imposant que $\alpha'(1) = (0, 1)$ trobem que $K_1 = 0$ i $K_2 = 1$, i per tant $X(t) = (\alpha_0, t)$.

Considerem ara les corbes en S de la forma $\beta(t) = \varphi(t, \beta_0)$, amb $\beta_0 > 0$. Calculant tenim que $u'(t) = 1$ i $v'(t) = 0$, i ens queda el sistema

$$\begin{cases} a' - \frac{av'}{v} - \frac{bu'}{v} = a' - \frac{b}{\beta_0} = 0 \\ b' + \frac{au'}{v} - \frac{bv'}{v} = b' + \frac{a}{\beta_0} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a' = \frac{b}{\beta_0} \\ b' = -\frac{a}{\beta_0}, \end{cases}$$

que té per solució

$$a(t) = A\cos(t/\omega) + B\sin(t/\omega) \qquad \text{i} \qquad b(t) = -A\sin(t/\omega) + B\cos(t/\omega),$$

i amb això tenim que les geodèsiques del pla hiperbòlic són les semirectes verticals i les semicircumferències.